MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI SI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală – 18 februarie 2012

CLASA A VI-A

SOLUŢIE ŞI BAREM DE CORECTARE:

Subiectul I	**Punctaj**
$A = \frac{1}{16} \cdot \frac{2^{6n+9} - 2^{6n+4} - 2^{6n+6}}{2^{2010}(4-2-1)}$	2p
$A = \frac{1}{16} \cdot \frac{2^{6n+4}(32-1-4)}{2^{2010}}$	2p
$A = \frac{1}{16} \cdot \frac{2^{6n} \cdot 16 \cdot 27}{2^{2010}}$	2p
$A \in \mathbf{N} \Rightarrow 6n \geq 2010 \Rightarrow n \geq 370$	3p
Din oficiu	1p

Subiectul II	**Punctaj**
Problema revine la a demonstra că numerele a şi b sunt prime între ele.	
Într-adevăr, fie d un divizor comun al numerelor a şi b.	1p
$d \mid a \Rightarrow d \mid (10n + 7) \Rightarrow d \mid 3(10n + 7) \Rightarrow d \mid (30n + 21)$	2p
$d \mid b \Rightarrow d \mid (6n + 5) \Rightarrow d \mid 5(6n + 5) \Rightarrow d \mid (30n + 25)$	2p
Scăzând relaţiile de mai sus, obţinem că $d \mid 4 \Rightarrow d \in \{1, 2, 4\}$	1p
Dar cum numerele a şi b sunt impare, rezultă că singurul lor divizor comun este 1.	1p
Înlocuind rezultatul de mai sus în relaţia $[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$, se obţine egalitatea din enunţ.	2p
Din oficiu	1p

Subiectul III	**Punctaj**
(OX mediatoarea lui [AP], deci $[OA] \equiv [OP]$ (1)	1p
$m(<AOP) = 2\,m(<XOP)$ (2)	1p
(OY mediatoarea lui [PB , deci $[OP] \equiv [OB]$ (3)	1p
$m(<BOP) = 2\,m(<YOP)$ (4)	1p
Din rel. (2) şi (4) rezultă $m(<AOB) = 2\,m(<XOY)$ (5)	2p
Din relaţiile (1) , (3) şi (5) reiese că triunghiul AOB este echilateral	2p
Aşadar rezultă $m(<AOB) = 60^o$, deci, $m(<XOY) = 30^o$	1p
Din oficiu	1p

Subiectul IV	**Punctaj**
a) $A_3A_4 = 8$ cm $\Rightarrow A_2A_3 = 16$ cm $\Rightarrow A_1A_2 = 32$ cm	3p
$A_1A_2 = 2 \cdot A_2A_3 = 2 \cdot 2 \cdot A_3A_4, = ... = 2^{2010} \cdot A_{2011}A_{2012}$.	1p
a) $A_1A_{2010} = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + ... + A_{2011}A_{2012}$	
Inegalitatea din enunt revine la a demonstra că	
$A_1A_2 > A_2A_3 + A_3A_4 + ... + A_{2011}A_{2012}$, adică	1p

$2^{2010} > 2^{2009} + 2^{2008} + 2^{2007} + ... + 2 + 1$, propoziţie adevărată.	1p
b) $A_pA_n = A_pA_{p+1} + A_{p+1}A_{p+2} + ... + A_{n-1}A_n = A_{2011}A_{2012}(2^{p-1}+2^p+...+ 2^{n-2})$ iar $A_nA_{2010} = A_nA_{n+1} + A_{n+1}A_{n+2} + ... + A_{2011}A_{2012} = A_{2011}A_{2012}(2^{n-1}+2^{n-2}+...+ 2 + 1)$. Problema revine la a arăta că $(2^{2011-p}+2^{2010-p}+...+ 2^{2012-n}) > (2^{2011-n}+2^{2010-n} +...+ 2 + 1)$. Într-adevăr, adunând 1 la membrul drept al inegalităţii şi efectuând calculele, se obţine 2^{2012-n}, mai mic decât membrul stâng al inegalităţii.	1p 1p 1p
Din oficiu	1p